

MAT 1739 - Cours 1

Rappels sur les fonctions

Automne 2019

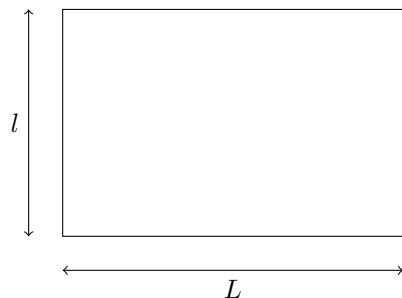
Table des matières

1	Rappels généraux	1
1.0	Aire et périmètre d'un rectangle	1
1.1	Rappels sur les ensembles	2
1.2	Intervalles de \mathbb{R}	2
1.3	Manipulation sur les fractions	2
1.4	Identités remarquables	3
2	Fonctions classiques	3
2.1	Définition	3
2.2	Exemples de graphes de fonctions usuelles	4
2.3	Fonctions affines et droites	4
2.4	Fonctions quadratiques et factorisation	5
2.5	Exemple (début cours 2)	6
2.6	Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles	6
2.7	Tableaux de signes	7

1 Rappels généraux

1.0 Aire et périmètre d'un rectangle

On considère un rectangle \mathcal{R} de longueur L et de largeur l .



Alors on a les formules suivantes :

$$\text{Aire de } \mathcal{R} = L \times l \quad \text{et} \quad \text{Périmètre de } \mathcal{R} = 2L + 2l.$$

1.1 Rappels sur les ensembles

Définition 1. Un *ensemble* est une collection d'objets. Ces objets sont appelés *éléments* de l'ensemble.

Notations. Soient A et B deux ensembles.

« x appartient A » se note $x \in A$.

« x n'appartient pas à A » se note $x \notin A$.

« A est inclus dans B » se note $A \subset B$ et signifie que pour tout $x \in A$, on a $x \in B$.

L'union de A et B se note $A \cup B$ (se lit « A union B »); c'est l'ensemble qui contient tous les éléments qui appartiennent à A OU à B .

L'intersection de A et B se note $A \cap B$ (se lit « A inter B »); c'est l'ensemble qui contient tous les éléments qui appartiennent à A ET à B .

On note $A \setminus B$ l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$ (éventuellement vide). Remarquez qu'on ne demande pas nécessairement que $B \subset A$.

Exemples. Soient $A = \{0, 3, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subset B$, mais $B \not\subset A$ (puisque $1 \notin A$).

$A \setminus \{0\} = \{3, 5\}$.

$B \setminus A = \{1, 2, 4\}$.

Exemples. Les exemples suivants sont des ensembles classiques.

- \emptyset ensemble vide (aucun élément)
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, ensemble des rationnels.
- \mathbb{R} ensemble des nombres réels.

1.2 Intervalles de \mathbb{R}

Soit $a < b$ deux réels. On définit les intervalles suivants :

$[a, b]$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ (a et b appartiennent à cet intervalle).

$[a, b[$ l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ (b n'appartient pas à cet intervalle).

$]a, b]$ l'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ (a n'appartient pas à cet intervalle).

$]a, b[$ l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ (a et b n'appartiennent pas à cet intervalle).

On peut également définir les intervalles (infinis) suivants :

$[a, +\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $x \geq a$ (a appartient à cet intervalle).

$]a, +\infty[$ l'ensemble des réels x tels que $x > a$ (a n'appartient pas à cet intervalle).

$] - \infty, a]$ l'ensemble des réels x tels que $x \leq a$ (a appartient à cet intervalle).

$] - \infty, a[$ l'ensemble des réels x tels que $x < a$ (a n'appartient pas à cet intervalle).

1.3 Manipulation sur les fractions

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ (avec $b, d \neq 0$).

On ne change pas une fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul. Autrement dit, pour tout nombre réel $\lambda \neq 0$, on a

$$\frac{\lambda a}{\lambda b} = \frac{a}{b}.$$

Pour multiplier deux fractions, on multiplie simplement les numérateurs et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Pour additionner deux fractions, il faut d'abord réduire au même dénominateur :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

On a l'équivalence suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Exemple. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{10}{6} &= \frac{2 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{3}, \\ \frac{7}{2} \times \frac{5}{3} &= \frac{7 \times 5}{2 \times 3} = \frac{35}{6}, \\ \frac{7}{2} + \frac{5}{3} &= \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 5}{2 \times 3} = \frac{21 + 10}{6} = \frac{31}{6}. \end{aligned}$$

1.4 Identités remarquables

Soient a et b deux réels. On a les identités remarquables suivantes :

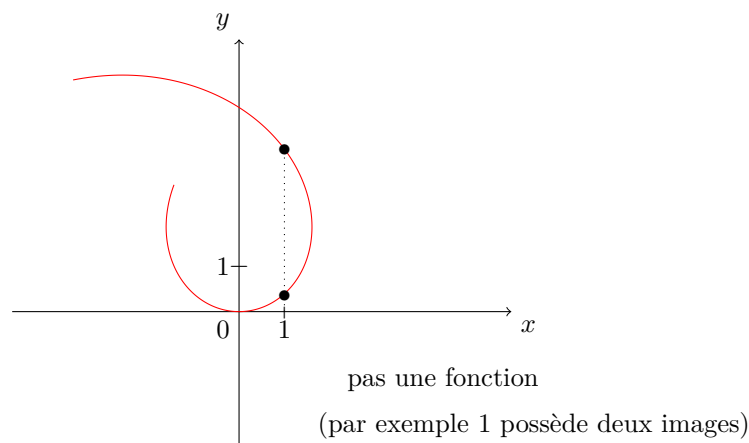
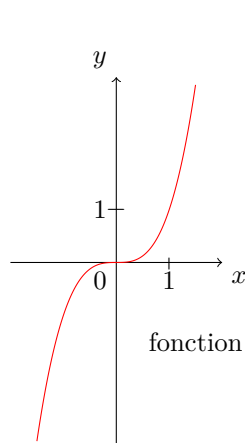
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Remarque. Ces identités peuvent être utilisées pour factoriser des expressions. Par exemple, on a $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

2 Fonctions classiques

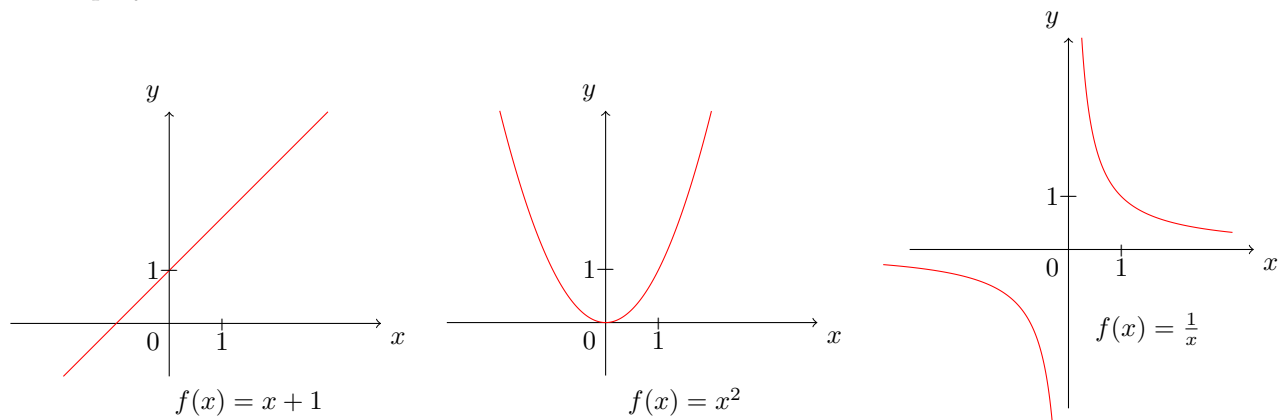
2.1 Définition

Définition 2. Une *fonction* $f : E \rightarrow F$ est définie par un ensemble de départ E (appelé le *domaine* de f), un ensemble d'arrivée F et une relation de E vers F qui associe à chaque élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$ et appelé *image* de x par f .

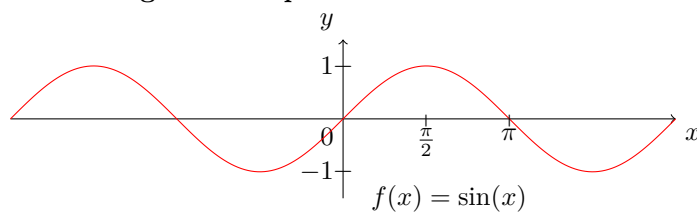


2.2 Exemples de graphes de fonctions usuelles

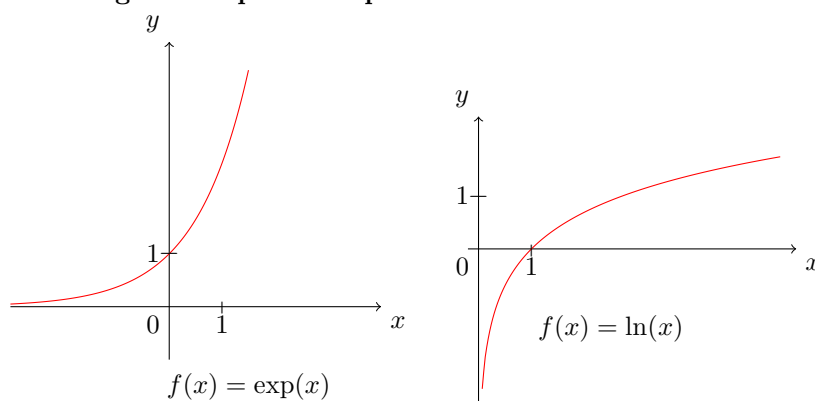
Fonctions polynomiales et rationnelles



Fonctions trigonométriques



Fonctions logarithmiques et exponentielles



2.3 Fonctions affines et droites

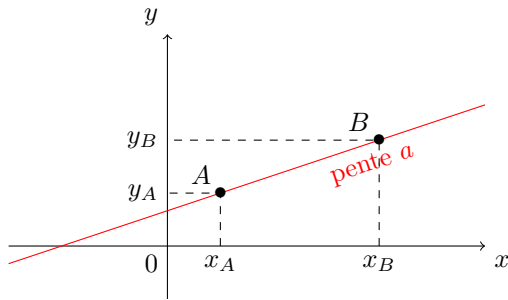
Définition 3. Une fonction affine $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$ ($x \in \mathbb{R}$) où a , appelé *coefficient directeur* ou *pente*, et b , appelé *ordonnée à l'origine*, sont deux nombres réels fixés. Le graphe d'une fonction affine est une droite. Son équation est $y = ax + b$.

Remarque. L'ordonnée à l'origine b vérifie $b = f(0)$.

Un point $A = (x_A, y_A)$ appartient à la droite d'équation $y = ax + b$ si et seulement si $y_A = ax_A + b$.

Proposition 4. Soient A et B deux points distincts du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . La droite passant par A et B a pour coefficient directeur

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Exemple. Déterminez l'équation de la droite \mathcal{D} passant par $(-2, 3)$ et $(4, 1)$.

Méthode : On note $y = ax + b$ l'équation de la droite \mathcal{D} . On détermine d'abord la pente a par la formule de la Proposition 4, puis on évalue en l'un des deux points par lequel passe \mathcal{D} pour déterminer l'ordonnée à l'origine b .

Réponse : On a

$$a = \frac{1 - 3}{4 - (-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

La droite passe par le point $A = (-2, 3)$, ce point doit donc vérifier l'équation $3 = a \times (-2) + b$. En remplaçant a par la valeur précédemment trouvée on obtient

$$3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-2) + b = \frac{2}{3} + b,$$

ce qui conduit à $b = 3 - \frac{2}{3} = \frac{9}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$. Finalement, l'équation de \mathcal{D} est

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

2.4 Fonctions quadratiques et factorisation

Définition 5. Une fonction quadratique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des réels fixés (et $a \neq 0$). Le *discriminant* de f est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

On appelle *racine* de f tout réel x vérifiant $f(x) = 0$. La courbe représentative de f est une parabole.

Proposition 6. Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction quadratique donnée par la formule $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note Δ le discriminant de f .

- Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racine réel et on ne peut pas factoriser f (dans \mathbb{R}).
- Si $\Delta > 0$, alors f admet exactement deux racines réelles

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La fonction f peut alors se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

- Si $\Delta = 0$, f admet exactement une racine réelle

$$r = -\frac{b}{2a}.$$

La fonction f peut alors se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - r)^2$.

Remarque. Voir la Proposition 9 pour avoir le tableau de signe d'une fonction quadratique.

2.5 Exemple (début cours 2)

Fin Cours 1 - Début Cours 2

Exemple. Factoriser $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.

Méthode : On calcule le discriminant de f . Si le discriminant est < 0 , on ne peut pas factoriser f dans \mathbb{R} . Si le discriminant est ≥ 0 , on calcule les racines avec les formules de la Proposition 6.

Solution : Le discriminant de f est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64 \geq 0$. La fonction f possède donc deux racines réelles qui sont données par les formules :

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{4 + 8}{4} = \frac{12}{4} = 3,$$

et

$$x_2 = \frac{4 - 8}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

On peut donc factoriser f en

$$f(x) = 2(x - 3)(x - (-1)) = 2(x - 3)(x + 1).$$

2.6 Fonctions polynomiales et fonctions rationnelles

Définition 7. Une fonction *polynomiale* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dont l'expression est donnée par une formule du type $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, où a_0, \dots, a_n sont des réels fixés ($a_n \neq 0$) et $n \in \mathbb{N}$ est un entier fixé. L'entier n est appelé le *degré* de f . On appelle *racine* de f tout réel x vérifiant $f(x) = 0$.

Exemple.

- Les fonctions constantes non nulles sont des fonctions polynomiales de degré 0.
- Les fonctions affines non constantes sont des fonctions polynomiales de degré 1 (exemple $f : x \mapsto 3x - 1$)
- Les fonctions quadratiques sont des fonctions polynomiales de degré 2 (exemple $f : x \mapsto 3x^2 + 7x$)
- Autre exemple : $f : x \mapsto 3x^5 + 8x^2 - 7$ (degré 5).

Définition 8. Une fonction *rationnelle* f est une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = p(x)/q(x)$, où p et q sont des fonctions polynomiales (q non constante nulle). Le domaine de définition de f est \mathbb{R} privé des racines de q , c'est-à-dire des réels x tels que $q(x) = 0$ (on ne peut pas diviser par 0!). Les racines de la fonction polynomiale q sont appelées les *pôles* de f .

Exemple. On définit f par la formule $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 4x - 6}$. Déterminez le domaine de définition de f .

Méthode : On détermine les racines du dénominateur de f , c'est-à-dire de la fonction polynomiale $x \mapsto 2x^2 - 4x - 6$, l'idéal est de trouver une expression factorisée. Le domaine de f est \mathbb{R} privé des racines éventuellement trouvées.

Réponse : On a vu que $2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$, ses racines sont 3 et -1 . Le domaine de définition de f est donc

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup]3, +\infty[.$$

Manipulations sur les fonctions rationnelles

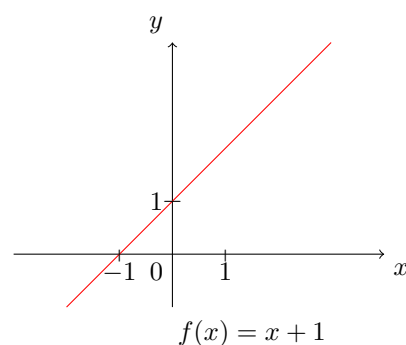
Les fonctions rationnelles se manipulent d'une manière similaire aux fractions (voir Partie 1.3). Par exemple, pour additionner deux fonctions rationnelles, il faut d'abord réduire au même dénominateur.

Exemple.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{x^2}{x-3} &= \frac{1 \times (x-3)}{(x+1)(x-3)} + \frac{(x+1) \times x^2}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-3 + (x+1)x^2}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{(x+1)(x-3)}. \end{aligned}$$

2.7 Tableaux de signes

On s'intéresse souvent à déterminer le signe d'une fonction. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$ dont le graphe est représentée ci-dessous



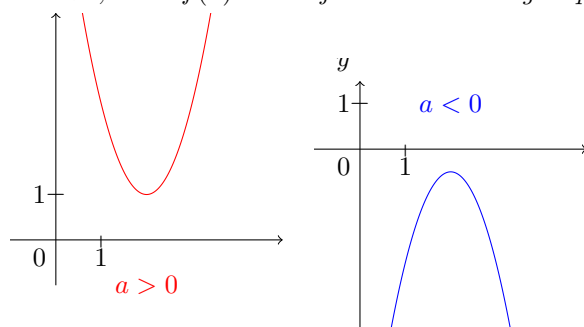
est négative sur $] -\infty, -1[$, positive sur $] -1, +\infty[$ et s'annule en -1 . Il est commode de représenter ces informations dans un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

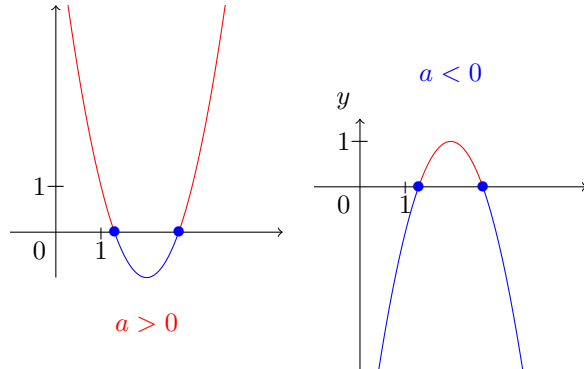
Tableau de signe d'une fonction quadratique

Proposition 9. Soit a, b, c trois réels, $a \neq 0$, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction quadratique donnée par la formule $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note Δ le discriminant de f .

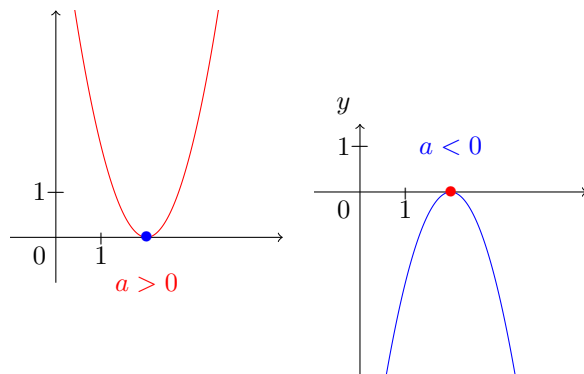
- Si $\Delta < 0$, alors $f(x)$ est toujours du même signe que a .



- Si $\Delta > 0$, alors f admet exactement deux racines réelles $r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. La quantité $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.



- Si $\Delta = 0$, $f(x)$ admet une seule racine réelle $r = -\frac{b}{2a}$ et est toujours du même signe que a .



Dans le cas plus compliqué de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 4x - 6}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1, 3$), on factorise le numérateur et le dénominateur puis on détermine le signe de chaque facteur. Les racines du dénominateur sont des valeurs interdites, les racines du numérateur sont les valeurs où f s'annule. On a

$$f(x) = \frac{x}{2(x+1)(x-3)}$$

(voir §2.4 pour la factorisation de $2x^2 - 4x - 6$). D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
signe de x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
signe de $x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
signe de $x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $f(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Pour avoir le signe de $f(x)$, on “compte” le nombre de signe $-$ dans le tableau : s’il y a un nombre impair de signe $-$, $f(x)$ est de signe $-$, s’il y a un nombre pair de signe $-$, $f(x)$ est de signe $+$.